

Ejercicios Teoría Cuántica de Campos. Capítulo 26

Autor del curso: Javier García

Problemas resueltos por: Roger Balsach

2 de noviembre de 2019

1. Calcular $\sigma_{\hat{p}}$.

Sea ψ un estado del espacio de Hilbert $L^2_{(-\infty, \infty)}$, en la representación de posiciones

$$\psi(x) = \sqrt[4]{\frac{2}{\pi}} e^{-x^2} \quad (1)$$

Queremos calcular la incertidumbre en p :

$$\sigma_{\hat{p}} := \sqrt{\langle \hat{p}^2 \rangle - \langle \hat{p} \rangle^2} \quad (2)$$

Empecemos por el cálculo más simple; $\langle \hat{p} \rangle$. En la representación de posiciones, el operador \hat{p} es proporcional al operador derivada; $\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$, mientras que el valor esperado viene dado por la expresión

$$\langle \hat{p} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \hat{p} \psi dx \quad (3)$$

Primero calculamos $\hat{p}\psi$

$$\hat{p}\psi = -i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x} = 2i\hbar \sqrt[4]{\frac{2}{\pi}} x e^{-x^2} \quad (4)$$

$$\langle \hat{p} \rangle = 2i\hbar \sqrt[4]{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-2x^2} dx \quad (5)$$

Podemos usar un argumento de simetría para decir que, como la función $x e^{-2x^2}$ es impar y el intervalo de integración es simétrico esta integral vale cero. Lo cual es

correcto, aunque primero deberíamos comprobar que la integral es convergente, cosa que se puede demostrar fácilmente. Por lo tanto $\langle \hat{p} \rangle = 0$.

Para calcular el valor esperado de \hat{p}^2 podemos proceder de la siguiente forma:

$$\langle \hat{p}^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \hat{p}^2 \psi \, dx \quad (6)$$

Dado que el operador \hat{p} es hermítico, podemos reescribir esta expresión como

$$\langle \hat{p}^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \hat{p}^\dagger \hat{p} \psi \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{p}\psi)^* \hat{p}\psi \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{p}\psi|^2 \, dx \quad (7)$$

Donde lo único que hemos hecho es utilizar una propiedad del producto escalar

$$\int (\hat{A}\psi)^* \phi \, dx = \int \phi (\hat{A}\psi)^* \, dx = \left(\int \phi^* \hat{A}\psi \, dx \right)^* = \int \psi^* \hat{A}^\dagger \phi \, dx \quad (8)$$

Simplemente definiendo el estado $\phi = \hat{p}\psi$ y haciendo $\hat{A} = \hat{p}$ obtenemos la ecuación (7)

Por lo que finalmente nos queda

$$\langle \hat{p}^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{p}\psi|^2 \, dx = 4\hbar^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-2x^2} \, dx = 8\hbar^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} x^2 e^{-2x^2} \, dx \quad (9)$$

Haciendo un cambio de variable $y = x^2$

$$\langle \hat{p}^2 \rangle = 4\hbar^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} y^{\frac{1}{2}} e^{-2y} \, dy = 4\hbar^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(\frac{1}{2})!}{2^{\frac{3}{2}}} = \hbar^2 \quad (10)$$

Donde he usado la formula integral

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} \, dx = \frac{n!}{a^{n+1}} \quad (11)$$

Y que $\frac{1}{2}! = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Con todo esto podemos calcular $\sigma_{\hat{p}}$

$$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\langle \hat{p}^2 \rangle} = \hbar \quad (12)$$

Que junto con el cálculo de Javier $\sigma_{\hat{x}} = \frac{1}{2}$ vemos que se cumple el principio de indeterminación de Heisenberg.

2. Partícula en un aro

2.1. Demostrar que el operador $\hat{\theta}$ es hermítico.

Primero tenemos que entender como actúa el operador $\hat{\theta}$ sobre los estados del espacio de Hilbert $|\psi\rangle$. El espacio de Hilbert en este caso es el espacio $L^2_{[0,2\pi]}$. En este caso podemos usar la resolución de la identidad $I = \int_0^{2\pi} |\theta\rangle \langle\theta| d\theta$ para escribir

$$|\psi\rangle = \int_0^{2\pi} |\theta\rangle \langle\theta|\psi\rangle d\theta := \int_0^{2\pi} \psi(\theta) |\theta\rangle \sqrt{R} d\theta \quad (13)$$

Donde hemos definido $\psi(\theta)$ como $\frac{\langle\theta|\psi\rangle}{\sqrt{R}}$. Si consideramos ahora el operador $\hat{\theta}$, actúa como

$$\hat{\theta} |\psi\rangle = \hat{\theta} I |\psi\rangle = \int_0^{2\pi} \hat{\theta} |\theta\rangle \langle\theta|\psi\rangle d\theta \equiv \int_0^{2\pi} \sqrt{R} \theta \psi(\theta) |\theta\rangle d\theta \quad (14)$$

Con lo que, multiplicando por $\langle\theta|$ (y cambiando la variable de la integral)

$$\langle\theta| \hat{\theta} |\psi\rangle = \int_0^{2\pi} \sqrt{R} \theta' \psi(\theta') \langle\theta|\theta'\rangle d\theta' = \int_0^{2\pi} \sqrt{R} \theta' \psi(\theta') \delta(\theta - \theta') d\theta' = \sqrt{R} \theta \psi(\theta) \quad (15)$$

Comparando esto con el hecho que $\langle\theta|\psi\rangle = \sqrt{R} \psi(\theta)$ observamos que el efecto del operador $\hat{\theta}$ es multiplicar por el valor θ . Para que $\hat{\theta}$ sea hermítico tiene que cumplirse que $(\langle\psi|\hat{\theta}|\phi\rangle)^* = \langle\phi|\hat{\theta}|\psi\rangle$ Apliquemos lo que ya sabemos, asumiendo que θ es real:

$$(\langle\psi|\hat{\theta}|\phi\rangle)^* = (\langle\psi|\hat{\theta}I|\phi\rangle)^* = \int_0^{2\pi} \langle\psi|\hat{\theta}|\theta\rangle^* \langle\theta|\phi\rangle^* d\theta = \int_0^{2\pi} \theta \psi(\theta) \phi(\theta)^* R d\theta \quad (16)$$

Por otra parte

$$\langle\phi|\hat{\theta}|\psi\rangle = \langle\phi|\hat{\theta}I|\psi\rangle = \int_0^{2\pi} \langle\phi|\hat{\theta}|\theta\rangle \langle\theta|\psi\rangle d\theta = \int_0^{2\pi} \theta \phi(\theta)^* \psi(\theta) R d\theta \quad (17)$$

Dado que $\phi(\theta)$ y $\psi(\theta)$ son funciones, conmutan y las dos expresiones resultan iguales. Demostrando que $\hat{\theta}$ es hermítico.

2.2. Calcular $\sigma_{\hat{\theta}}$ y $\sigma_{\hat{L}_z}$

Si consideramos el estado $|1\rangle$, que tiene las siguientes propiedades:¹

$$\langle\theta|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\theta}, \quad L_z |1\rangle = \hbar |1\rangle \quad (18)$$

¹En este ejercicio defino los estados $|\theta\rangle$ ligeramente distinto a como lo hace Javier, por lo que estas propiedades son ligeramente distintas. En concreto si queréis las expresiones que obtiene Javier solo tenéis que multiplicar $|\theta\rangle$ por \sqrt{R} .

Empecemos por $\sigma_{\hat{\theta}}$, calculemos primero

$$\langle \hat{\theta} \rangle = \langle 1 | \hat{\theta} | 1 \rangle = \langle 1 | I \hat{\theta} I | 1 \rangle = \int_0^{2\pi} \langle 1 | \theta \rangle \langle \theta | \hat{\theta} | \theta' \rangle \langle \theta' | 1 \rangle d\theta d\theta' \quad (19)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \theta' e^{-i(\theta-\theta')} \delta(\theta-\theta') d\theta d\theta' = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \theta d\theta = \frac{1}{4\pi} [\theta^2]_0^{2\pi} = \frac{4\pi^2}{4\pi} = \pi \quad (20)$$

$$\langle \hat{\theta}^2 \rangle = \langle 1 | \hat{\theta}^2 | 1 \rangle = \int_0^{2\pi} \langle 1 | \theta \rangle \langle \theta | \hat{\theta}^2 | \theta' \rangle \langle \theta' | 1 \rangle d\theta d\theta' \quad (21)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \theta^2 e^{-i(\theta-\theta')} \delta(\theta-\theta') d\theta d\theta' \quad (22)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \theta^2 d\theta = \frac{1}{6\pi} [\theta^3]_0^{2\pi} = \frac{8\pi^3}{6\pi} = \frac{4\pi^2}{3} \quad (23)$$

$$\sigma_{\hat{\theta}} = \sqrt{\langle \hat{\theta}^2 \rangle - \langle \hat{\theta} \rangle^2} = \sqrt{\frac{4\pi^2}{3} - \pi^2} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \quad (24)$$

Calculemos ahora $\sigma_{\hat{L}_z}$:

$$\langle L_z \rangle = \langle 1 | L_z | 1 \rangle = \hbar \langle 1 | 1 \rangle = \hbar \quad (25)$$

$$\langle L_z^2 \rangle = \langle 1 | L_z^2 | 1 \rangle = \hbar^2 \langle 1 | 1 \rangle = \hbar^2 \quad (26)$$

Por lo que $\sigma_{\hat{L}_z} = 0$

2.3. Principio de indeterminación de Heisenberg

Queremos comprobar si se cumple que el principio de indeterminación de Heisenberg, Javier nos dice que $[\hat{\theta}, \hat{L}_z] = i\hbar$, por lo que el principio de indeterminación nos dice que

$$\sigma_{\hat{\theta}} \sigma_{\hat{L}_z} \geq \left| \frac{1}{2} \langle [\hat{\theta}, \hat{L}_z] \rangle_{\psi} \right| = \frac{1}{2} | \langle i\hbar \rangle_{\psi} | = \frac{\hbar}{2} \quad (27)$$

Pero usando los resultados de la anterior sección $\sigma_{\hat{L}_z} = 0$ y $\sigma_{\hat{\theta}} < \infty$, por lo que obtenemos la ecuación

$$0 \geq \frac{\hbar}{2} \quad (28)$$

Que, evidentemente es una contradicción.

2.4. ¿Qué está pasando?

Para entender qué está pasando, vamos a ver dos puntos de vista, uno más físico, y otro más matemático.

Físicamente, el principio de incertidumbre de Heisenberg, nos dice que es imposible conocer con total exactitud dos magnitudes, que cuanto más precisión tengas en la medida de una magnitud, menos precisión podrás obtener en la medida de la otra. En nuestro caso, al tener un estado propio de \hat{L}_z conocemos con total precisión el valor de L_z , lo que se traduce en no tener absolutamente ni idea de el valor de θ . En el caso de una variable que pueda tomar cualquier valor real, como la posición eso se traduce a una incertidumbre infinita, pero en caso de una variable que esté limitada en el intervalo $[0, 2\pi]$ el no tener ni idea se traduce en una distribución de probabilidad uniforme en todo el intervalo, es decir que la probabilidad de encontrar la partícula con un ángulo entre θ y $\theta + d\theta$ no depende del valor de θ . ¿Como calculamos esto? Pues precisamente esta información nos la da la cantidad $|\psi|^2$. En este caso

$$\psi(\theta) = \frac{\langle \theta | 1 \rangle}{\sqrt{R}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} e^{i\theta} \implies |\psi|^2 = \frac{1}{2\pi R} \quad (29)$$

Pero esto no explica porque la formulación matemática de el principio de incertidumbre de Heisenberg nos lleva a una contradicción, la razón es que hemos usado que $[\hat{\theta}, \hat{L}_z] = i\hbar$, como parece lógico, pues la demostración es bastante simple:

$$[\hat{\theta}, \hat{L}_z]\psi = (-i\hbar)\theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + i\hbar \frac{\partial(\theta\psi)}{\partial \theta} = -i\hbar\theta\psi' + i\hbar(\psi + \theta\psi') = i\hbar\psi \quad (30)$$

Esta demostración de hecho es equivalente al caso de la posición y momento, pero en este caso es incorrecta! La razón es justamente que θ no está definido en toda la recta real, como x , sino que solo está definida en un intervalo $[0, 2\pi]$, esto nos lleva a tener que vigilar a la hora de derivar. Queremos imponer que toda función de onda cumpla que $\psi(\theta + 2\pi) = \psi(\theta)$, esto tiene que cumplirse también para $\psi(\theta) = \theta^2$, entonces

$$\frac{\partial \psi(\theta)}{\partial \theta} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\psi(\theta + \varepsilon) - \psi(\theta - \varepsilon)}{2\varepsilon} \quad (31)$$

Esto en el intervalo $(0, 2\pi)$ da el resultado esperado de 1. Pero si evaluamos este límite a $\theta = 0$ obtenemos

$$\left. \frac{\partial \psi(\theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=0} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\psi(\varepsilon) - \psi(-\varepsilon)}{2\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\varepsilon - (2\pi - \varepsilon)}{2\varepsilon} = 1 - 2\pi \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\varepsilon} \quad (32)$$

²Lo que nos generaliza la función θ a toda la recta real.

Donde he usado la propiedad impuesta antes $\psi(-\varepsilon) = \psi(2\pi - \varepsilon) = 2\pi - \varepsilon$. Recordando que una forma de definir la delta de Dirac es

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon} & \text{si } |x| < \varepsilon \\ 0 & \text{si } |x| > \varepsilon \end{cases} \quad (33)$$

Podemos afirmar que

$$\frac{\partial \psi(\theta)}{\partial \theta} = 1 - 2\pi\delta(\theta) \quad (34)$$

Y, con esto

$$[\hat{\theta}, \hat{L}_z] \psi = (-i\hbar)\theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + i\hbar \frac{\partial(\theta\psi)}{\partial \theta} = -i\hbar\theta\psi' + i\hbar[(1 - 2\pi\delta(\theta))\psi + \theta\psi'] \quad (35)$$

$$= i\hbar(1 - 2\pi\delta(\theta))\psi \implies [\hat{\theta}, \hat{L}_z] = i\hbar(1 - 2\pi\delta(\theta)) \quad (36)$$

Entonces

$$\langle \psi | [\hat{\theta}, \hat{L}_z] | \psi \rangle = i\hbar \int_0^{2\pi} \psi^* (1 - 2\pi\delta(\theta)) \psi R d\theta = i\hbar (1 - 2\pi R |\psi(0)|^2) = 0 \quad (37)$$

Donde he usado el resultado obtenido en la ecuación (29). Ahora sí, si volvemos a mirar la ecuación (27) observamos que el principio de Heisenberg no da ninguna contradicción. Restableciendo así el equilibrio en el universo.

El camino seguido en este razonamiento es el de definir las funciones ψ solo en el intervalo $[0, 2\pi]$ y extenderlo luego a toda la recta real imponiendo $\psi(\theta) = \psi(\theta + 2\pi)$. Otro camino equivalente seria es de suponer que ψ puede estar definido para todos los reales pero solo son validas aquellas que cumplan la condición antes dicha, en este caso el principio de incertidumbre falla porque resulta imposible definir el operador $\hat{\theta}$, pues debido a que θ no es una función periódica, al multiplicar cualquier función periódica por θ obtenemos una función no periódica, y por lo tanto, una función que no es válida. Así pues el teorema no se cumple, pues solo es aplicable a operadores que transforman funciones validas en otras funciones también validas.